TITLE:
$Sp(2,bm{R})$の主系列表現の組成列について (表現論および表現論の関連する諸分野の発展)

AUTHOR(S):
谷口, 健二

CITATION:
谷口, 健二. $Sp(2,bm{R})$の主系列表現の組成列について (表現論および表現論の関連する諸分野の発展). 数理解析研究所講究録 2014, 1877: 104-120

ISSUE DATE:
2014-02

URL:
http://hdl.handle.net/2433/195587

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1877 巻 2014 年 104-120

$Sp(2, \boldsymbol{R})$ の主系列表現の組成列について

(On the composition series of principal series representations of $Sp(2, \boldsymbol{R})$)

青山学院大学　谷口 健二
Kenji Taniguchi
Aoyama Gakuin University

1　序

群や環の表現論の自然な問題として，与えられた表現の組成列・組成因子を決定するというものがある．半単純 Lie 環の Verma 加群の組成因子問題は，論文 [6] に因んで Kazhdan-Lusztig 予想と呼ばれ，これは Brylinski-Kashiwara [4] と Beilinson-Bernstein [2] によって証明された．

G を実簡約型線形 Lie 群とし，その Lie 環の複素化を $\mathfrak{g}$ で表す．本稿では，この記法を他の実 Lie 群に対しても用いる．K を G の極大コンパクト部分群とする．Harish-Chandra の部分商定理により，G の任意の既約 admissible 表現 (あるいはその代数的対応物である $(\mathfrak{g}, K)$-加群) は主系列表現の部分商に現れる．また，Langlands [8] によれば，標準加群 (ある種の一般化主系列表現の $(\mathfrak{g}, K)$-加群) のある特別な組成因子 (Langlands 商，あるいは Langlands 部分加群と呼ばれる) によって既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群を分類できることが知られている．

標準加群の組成因子問題は，Verma 加群に対する Kazhdan-Lusztig 予想を一般化する形で Vogan の論文 [10] によって予想 (本稿では Kazhdan-Lusztig-Vogan (KLV) 予想と呼ぶ) が与えられ，Vogan 自身がその予想を証明した ([11]).

このように，標準加群の組成因子問題は 1980 年代前半までに解決されたが，既約因子の順序を込めて組成列を完全に決定する問題は，その複雑さからあまりわかっていない．この問題は，実階数 1 の群については，Collingwood [5] によって解決済みであるが，一般の群に対しては，本稿の著者が調べた限り，完全な結果はないようである．

そこで実階数の高い群の場合への足がかりとして，$G = Sp(2, \boldsymbol{R})$ であって，無限小指標が nonsingular かつ integral な場合について，極小放物型部分群から誘導された主系列表現を調べたところ，その組成列を完全に決定できたので，本稿でその結果を報告する．

ここで「組成列を完全に決定する」とは，socle filtration を決定する，という意味である．一般に，X を有限の長さを持つ $(\mathfrak{g}, K)$-加群としたとき，完全可約な X の部分加群のうち最大のものを X の socle という．X の socle を X_1 としたとき，X/X_1 は再び有限の長さを持つので，その socle X_2 を取ることができる．以下同様にして作られた socle の列を X の socle filtration という．

本稿は青山学院大学の橋本尚貴氏との共同研究に基づくものである．また，本研究は JSPS 科研費 24540027 の助成を受けたものである．

2 計算方法

今回は，以下のような方針で $G=Sp(2,\boldsymbol{R})$ の主系列表現の socle filtration を調べた．

(1) Translation principle により，無限小指標が自明な場合のみを考えれば良い．

(2) 各既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群の K-タイプとその重複度を求める．

(3) 主系列表現の部分加群となり得る既約加群の候補をすべて求める．

(4) 主系列表現のある K-タイプを考え，そこに含まれるベクトルのうち，どれがどの既約因子に対応するかを調べる．

(5) このようにして求めたベクトルに Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元を作用させて他の K-タイプに移動したとき，移動後のベクトルがどの既約因子に含まれるかを調べる．

基本的には上記のような，非常に直接的な計算を行っている．しかし (2)–(5) だけでは組成列の決定が困難な場合もあるので，簡約型 Lie 群の表現に関して知られている結果を援用した．これにより (2)–(5) のうち，いくつかは計算せずとも結果がわかる場合もあった．

この計算方針について，いくつか補足説明をしておく．

(3) について：これは Yamashita による離散系列表現の誘導表現への埋め込みの決定方法 ([14]) と同じやり方を用いた．

(4) について：これは簡単ではないが，特別な場合については容易である．例えば主系列表現の中で重複度が 1 の K-タイプがあるなら，KLV 予想の結果と照らし合わせることにより，それがどの既約因子に含まれるかがわかる．

(5) について：$\mathfrak{g}$ の作用を見るために，K-タイプの shift 作用素を用いて計算した．

この説明だけではよくわからない部分も多いと思われるので，以下適宜説明しながら各ステップを見ていくことにする．

3 $Sp(2,\boldsymbol{R})$ の既約表現の分類

まず．既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群の Langlands 分類について説明する．本稿では最終的には $G=Sp(2,\boldsymbol{R})$ の場合のみ扱うが，ここでは G が一般の群の場合について述べる．

G を実簡約型線形 Lie 群とする．G の Cartan 対合 θ を一つ取り，$K=G^{\theta}$ を対応する極大コンパクト部分群とする．θ-stable な Cartan 部分群 $H=TA$ $(T=H\cap K)$ に対し，$L:=Z_G(A)$ の Langlands 分解を $L=MA$ とする．このとき T は M のコンパクト Cartan 部分群である．

$\widehat{H}$ を H の指標の全体の集合とし，$\mathfrak{h}^*$ で H の Lie 環 $\mathfrak{h}$ の複素双対空間を表す．

定義 1 組 $\gamma = (\Gamma, \overline{\gamma})$ ($\Gamma \in \widehat{H}, \overline{\gamma} \in \mathfrak{h}^*$) であって，次の (i), (ii) を満たすものを，H の regular 指標という：

(i) $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{t})$ ならば $\langle \alpha, \overline{\gamma} \rangle$ は 0 でない実数である．

ここで $\Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{t}) = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{t}) \mid \langle \alpha, \overline{\gamma} \rangle > 0\}$ とし，$\rho_{\mathfrak{m}} = \rho(\Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{t}))$, $\rho_{\mathfrak{m}\cap\mathfrak{k}} = \rho(\Delta^+(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{k}, \mathfrak{t}))$ とする．

(ii) Γ の微分 $d\Gamma$ は $\overline{\gamma} + \rho_{\mathfrak{m}} - 2\rho_{\mathfrak{m}\cap\mathfrak{k}}$ に等しい．

このとき

(1) M の離散系列表現 σ であって，σ の極小 K-タイプの最高ウェイトが Γ であるようなものが存在する．

(2) $\nu := \overline{\gamma}|_{\mathfrak{a}}$ とする．

ここで G の放物型部分群 $P = MAN$, $P^- = MAN^-$ を，N, N^- がそれぞれ ν に関して正, 負になるように取る．その上で $\pi(\gamma), \pi^-(\gamma)$ を，それぞれ $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes e^{\nu+\rho})$, $\mathrm{Ind}_{P^-}^G(\sigma \otimes e^{\nu+\rho})$ の $(\mathfrak{g}, K)$-加群とし，これらを標準加群と呼ぶ[1]．このとき

$$A(\gamma) : \pi(\gamma) \to \pi^-(\gamma), \qquad A(\gamma)f(g) := \int_{N^-} f(gn)\, dn$$

という intertwining 作用素の像は 0 加群でないことが知られている．また，$\overline{\gamma}$ が nonsingular なら，この像は既約であることも知られている．この像を $\pi^-(\gamma)$ の Langlands 部分加群，あるいは $\pi(\gamma)$ の Langlands 商といい，$\overline{\pi}(\gamma)$ で表す．

無限小指標 Λ に対し，

$$\widehat{H}'_\Lambda := \{\gamma = (\Gamma, \overline{\gamma}) \mid \gamma \text{ は } H \text{ の regular 指標}, \ \chi_{\overline{\gamma}} = \chi_\Lambda\}$$

とおく．

定理 2 (Langlands 分類) Λ は nonsingular とする．

(1) 無限小指標が Λ であるような既約 admissible $(\mathfrak{g}, K)$-加群 π に対し，ある Cartan 部分群 H と $\gamma \in \widehat{H}'_\Lambda$ があって，$\pi \simeq \overline{\pi}(\gamma)$ が成り立つ．

(2) $\overline{\pi}(\gamma_1) \simeq \overline{\pi}(\gamma_2)$, $\gamma_i \in (\widehat{H_i})'_\Lambda$ ならば，(H_1, γ_1) は K の作用で (H_2, γ_2) と共役である．

ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ のある正系 $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を取り，$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \alpha$ とする．定理 2により，例えば $\Lambda - \rho$ がルートの和であるとき，無限小指標が Λ であるような既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群の同値類の個数は

$$\sum_H \#(W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})/W(G, H)) \times \#(H/H_0)$$

[1] Kazhdan-Lusztig 理論では，標準加群の組成因子決定問題が主題であるため,「標準加群」というときには，組成因子が一致するものを区別せずに同一視することが多い．ここでは組成列の決定問題を考えているため，状況に応じて区別したりしなかったりする．

であることがわかる．ただし，この式の和は Cartan 部分群 H の共役類を亘る和であり，H_0 は H の単位元連結成分である．

ここからは $G=Sp(2,\boldsymbol{R})$ として，既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群の Langlands 分類を具体的に書き下していこう．そのために，まず Cartan 部分群の共役類の分類から始める．なお，$G=Sp(2,\boldsymbol{R})$ は ${}^t g\, J_n\, g=J_n$, $J_n:=\begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}$ (I_n は n 次単位行列) を満たす実行列の全体として実現する．

(1) Split Cartan 部分群 H_{split}.

$G=Sp(2,\boldsymbol{R})$ の元で，対角行列であるものの全体は，G の split な Cartan 部分群になる．これを H_{split} で表す．このとき $T\simeq \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$, $W(G,H_{\mathrm{split}})\simeq W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ であるので，nonsingular な無限小指標を固定したとき，既約加群の同値類は 4 個ある．また，標準加群を定める放物型部分群は極小放物型部分群である．

(2) "Siegel" Cartan 部分群 H_{Sie}

$$\mathfrak{t}_{\mathrm{Sie}} := \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix},\ \mathfrak{a}_{\mathrm{Sie}} := \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix},\ \mathfrak{h}_{\mathrm{Sie}} := \mathfrak{t}_{\mathrm{Sie}}\oplus\mathfrak{a}_{\mathrm{Sie}},$$

$H_{\mathrm{Sie}}:=Z_G(\mathfrak{h}_{\mathrm{Sie}})$ とすると，H_{Sie} は G の Cartan 部分群である．このとき H_{Sie} は連結で，$W(G,H_{\mathrm{Sie}})\simeq\mathfrak{S}_2\times\mathfrak{S}_2$ であるので，nonsingular な無限小指標を固定したとき，既約加群の同値類は 2 個ある．また，標準加群を定める放物型部分群は，Siegel 放物型部分群と呼ばれ，その M 部分は $SL^{\pm}(2,\boldsymbol{R})$ に同型である．

(3) "Jacobi" Cartan 部分群 H_{J}

$$\mathfrak{t}_{\mathrm{J}} := \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} & & & \\ & & & -1 \\ & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix},\ \mathfrak{a}_{\mathrm{J}} := \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & \\ & & -1 & \\ & & & \end{pmatrix},\ \mathfrak{h}_{\mathrm{J}} := \mathfrak{t}_{\mathrm{J}}\oplus\mathfrak{a}_{\mathrm{J}},\ H_{\mathrm{J}} := Z_G(\mathfrak{h}_{\mathrm{J}})$$

とすると，H_{J} は G の Cartan 部分群である．このとき $T_{\mathrm{J}}\simeq\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}\times SO(2)$ であり，$W(G,H_{\mathrm{J}})\simeq\mathfrak{S}_2$ であるので，nonsingular な無限小指標を固定したとき，既約加群の同値類は 8 個ある．また，標準加群を定める放物型部分群は Jacobi 放物型部分群と呼ばれ，その M 部分は $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}\times SL(2,\boldsymbol{R})$ に同型である．

(4) Compact Cartan 部分群 H_{cpt}

$K\simeq U(2)$ の Cartan 部分群 H_{cpt} は G の Cartan 部分群でもある．このとき H_{cpt} は連結で，$W(G,H_{\mathrm{cpt}})\simeq\mathfrak{S}_2$ であるので，nonsingular な無限小指

標を固定したとき，既約加群の同値類は4個ある．これらは G の離散系列表現であり，標準加群と一致する．(つまり標準加群は既約である．)

既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群の分類を具体的に述べる前に，Vogan によるブロックの概念を導入しておこう．ここでもしばらくの間，G は一般の実簡約型線形 Lie 群とする．

ある regular 指標 γ に対し，対応する標準加群を $\pi(\gamma)$，その Langlands 商を $\overline{\pi}(\gamma)$ と書いた．

定義 3 既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群のブロック同値 $\sim$ とは，

$$\overline{\pi}(\gamma_1) \sim \overline{\pi}(\gamma_2) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\pi}(\gamma_1) \text{ は } \pi(\gamma_2) \text{ の組成因子}$$

により生成される同値関係である．このとき，同値類をブロックという．

さて，$\{\overline{\pi}_1,\ldots,\overline{\pi}_r\}$ を $(\mathfrak{g},K)$-加群の一つのブロックとする．このとき，標準加群 π_j と既約加群 $\overline{\pi}_i$ に対し，

$$\pi_j = \sum_i m(\overline{\pi}_i,\pi_j)\,\overline{\pi}_i, \qquad\qquad \overline{\pi}_i = \sum_j M(\pi_j,\overline{\pi}_i)\,\pi_j$$

によって整数 $m(\overline{\pi}_i,\pi_j)$, $M(\pi_j,\overline{\pi}_i)$ を定める．ただし，上記の記号は両辺の表現の指標の関係式として理解する．

G の Lie 環の複素化 $\mathfrak{g}$ の双対 Lie 環を $\mathfrak{g}^\vee$ で表す．このとき次が成り立つ．

定理 4 (Vogan, [12]) $\{\overline{\pi}_1,\ldots,\overline{\pi}_r\}$ を，自明な無限小指標をもつ既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群の一つのブロックとする．このとき $\mathfrak{g}^\vee$ の実型を Lie 環とする実簡約型 Lie 群 $G^\vee$ と，既約 $(\mathfrak{g}^\vee,K^\vee)$-加群のブロック $\{\overline{\rho}_1,\ldots,\overline{\rho}_r\}$ であって，$\epsilon_{ij}=\pm1$ をうまく選べば

$$M(\pi_j,\overline{\pi}_i)=\epsilon_{ij}m(\overline{\rho}_i,\rho_j), \qquad M(\rho_j,\overline{\rho}_i)=\epsilon_{ij}m(\overline{\pi}_i,\pi_j), \qquad (i,j=1,\ldots,r)$$

となるようなものが存在する．

では $G=Sp(2,\boldsymbol{R})$ で自明な無限小指標を持つ既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群を，ブロックごとに書き下していこう．下記の表において，一番左の列は，各ブロックに属する既約表現に対応する標準加群の Atlas [1] における番号である．また「長さ」とは以下のように定義したものである：

定義 5 ([9, Definition 8.1.4]) Λ を nonsingular で integral な無限小指標とし，H を G の Cartan 部分群とする．Regular 指標 $\gamma\in\widehat{H}'_\Lambda$ の長さ $\ell(\gamma)$ を

$$\ell(\gamma)=\frac{1}{2}\#\{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\,|\,\theta\alpha\notin\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\}+\frac{1}{2}\dim\mathfrak{a}-\frac{1}{2}\dim\mathfrak{a}_f.$$

で定める．但し，$\mathfrak{h}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{a}$ は H の Lie 環であり，$\mathfrak{h}_f=\mathfrak{t}_f\oplus\mathfrak{a}_f$ は fundamental Cartan 部分環である．

「単純ルート」の項の説明はここでは省く．詳しくは Vogan の一連の論文を読むか，あるいはその概要をまとめた [13] を参照．

I. ブロック $PSO(3,2)$

Atlas の番号	長さ	単純ルート short	単純ルート long	Cartan 部分群
0	0	nc 1	nc 1	cpt
1	0	nc 1	nc 1	cpt
2	0	cpt	nc 1	cpt
3	0	cpt	nc 1	cpt
4	1	$\theta > 0$	real 1	Jacobi
5	1	$\theta > 0$	real 1	Jacobi
6	1	real 1	$\theta > 0$	Siegel
7	2	nc 2	$\theta < 0$	Siegel
8	2	$\theta < 0$	nc 1	Jacobi
9	2	$\theta < 0$	nc 1	Jacobi
10	3	real 2	real 1	split
11	3	real 2	real, not in τ	split

以下，標準加群 x の Langlands 商を $\overline{x}$ で表す．上記の表において，$0 = \overline{0}$, $1 = \overline{1}$ は大きな離散系列表現であり，$2 = \overline{2}$, $3 = \overline{3}$ は正則/反正則離散系列表現，10 の Langlands 商 $\overline{10}$ は自明表現である．

Kazhdan-Lusztig-Vogan 予想の結果より，各標準加群の組成因子は次のようになることが知られている：

$$
\begin{aligned}
&0 = \overline{0}, \qquad 1 = \overline{1}, \qquad 2 = \overline{2}, \qquad 3 = \overline{3},\\
&4 = \overline{0} + \overline{2} + \overline{4}, \qquad 5 = \overline{1} + \overline{3} + \overline{5}, \qquad 6 = \overline{0} + \overline{1} + \overline{6},\\
&7 = \overline{0} + \overline{1} + \overline{4} + \overline{5} + \overline{6} + \overline{7},\\
&8 = \overline{0} + \overline{4} + \overline{6} + \overline{8}, \qquad 9 = \overline{1} + \overline{5} + \overline{6} + \overline{9},\\
&10 = \overline{0} + \overline{1} + \overline{4} + \overline{5} + 2 * \overline{6} + \overline{7} + \overline{8} + \overline{9} + \overline{10},\\
&11 = \overline{0} + \overline{1} + \overline{2} + \overline{3} + \overline{4} + \overline{5} + \overline{6} + \overline{7} + \overline{11}.
\end{aligned}
$$

標準加群は M 部分の離散系列表現から誘導された主系列表現であるから，その K-タイプの分布は Frobenius の相互律を用いて計算可能である．また G の離散系列表現の K-タイプの分布は Blattner 公式より計算可能である．これらと上記の組成因子の明示式より，各既約加群の K-タイプの分布は計算可能である．$K \simeq U(2)$ の既約表現は最高ウェイト $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $(\lambda_1 \geq \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{Z})$ で分類される．今回の計算では，各既約加群の K-タイプのうち，$|\lambda_1|, |\lambda_2| \leq 3$ を満たすものの分布があれば (結果的に) 十分であったので，それを書いておこう．

表 1 : 無限小指標自明，ブロック $PSO(3,2)$．表中の K-タイプの重複度は全て 1.

既約加群	K-タイプ	既約加群	K-タイプ
$\overline{0}$	$(3,-1),(3,-3)$	$\overline{1}$	$(1,-3),(3,-3)$
$\overline{2}$	$(3,3)$	$\overline{3}$	$(-3,-3)$
$\overline{4}$	$(3,1)$	$\overline{5}$	$(-1,-3)$
$\overline{6}$	$(2,-2)$	$\overline{7}$	$(2,0),(1,-1),(0,-2),(3,-1),$ $(2,-2),(1,-3),(3,-3)$
$\overline{8}$	$(2,2),(2,0)$	$\overline{9}$	$(-2,-2),(0,-2)$
$\overline{10}$	$(0,0)$	$\overline{11}$	$\pm(1,1),(3,\pm1),(\pm1,-3),$ $(1,-1),(3,-3)$

II. ブロック $PSO(4,1)$

Atlas の番号	長さ	単純ルート short	単純ルート long	Cartan 部分群
0	1	$\theta > 0$	real, not in τ	Jacobi
1	1	$\theta > 0$	real, not in τ	Jacobi
2	2	$\theta < 0$	nc 1	Jacobi
3	2	$\theta < 0$	nc 1	Jacobi
4	3	real, not in τ	real 1	split

標準加群の組成因子

$$
\begin{aligned}
&0=\overline{0}, \qquad 1=\overline{1},\\
&2=\overline{0}+\overline{2}, \qquad 3=\overline{1}+\overline{3},\\
&4=\overline{0}+\overline{1}+\overline{2}+\overline{3}+\overline{4}.
\end{aligned}
$$

表 2 : 無限小指標自明，ブロック $PSO(4,1)$.

標準加群	K-タイプ	重複度
$\overline{0}$	$(3,2),(3,0),(3,-2)$	1
$\overline{1}$	$(-2,-3),(0,-3),(2,-3)$	1
$\overline{2}$	$(3,2),(3,0),(3,-2),(2,1),(2,-1),(2,-3)$	1
$\overline{3}$	$(-2,-3),(0,-3),(2,-3),(-1,-2),(1,-2),(3,-2)$	1
$\overline{4}$	$(3,2),(2,1),(1,0),(0,-1),(-1,-2),(-2,-3)$	1
	$(3,0),(2,-1),(1,-2),(0,-3)$	2
	$(3,-2),(2,-3)$	3

III. ブロック $PSO(5)$．これは一つの既約主系列表現からなる．

4 K-タイプの shift 作用素

本節では，$Sp(2,\boldsymbol{R})$ の主系列表現の組成列を決める際に使う K-タイプの shift 作用素を説明する．

まず，主系列表現の記号を決めておこう．$P=MAN$ を G の極小放物型部分群とし，σ を M の既約表現とする．A の1次元表現を $\nu\in\mathfrak{a}^*$ ($\mathfrak{a}=\mathrm{Lie}(A)\otimes\boldsymbol{C}$) と同一視する．ここで ν は nonsingular かつ integral であるとする．また，$\rho=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}|_{\mathfrak{n}})$ とする．すでに述べたように，$P=MAN$ の既約表現 $\sigma\otimes e^{\nu+\rho}\otimes 1_N$ から誘導した G の表現の Harish-Chandra 加群 $I(\sigma,\nu)=\mathrm{Ind}_P^G(\sigma\otimes e^{\nu+\rho})_{K\text{-finite}}$ の socle filtration を決定するのが，本稿の主題である．Translation principle により，この問題は $\nu\in W\rho$ (W は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群), つまり無限小指標が自明な場合に帰着される．

次に K-タイプの shift 作用素について簡単に説明する．(τ,V_τ) を $I(\sigma,\nu)$ の一つの K-タイプとし，(τ^*,V_τ^*) をその反傾表現とする．すると (τ,V_τ) から $I(\sigma,\nu)$ への K-intertwining 作用素は

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_K(\tau,I(\sigma,\nu))&\simeq C^\infty_{\tau^*}(K\backslash G/MAN;\sigma\otimes e^{\nu+\rho})\\&:=\{\Phi:G\xrightarrow{C^\infty}V_\tau^*\otimes V_\sigma\mid\\&\qquad\Phi(kgman)=a^{-\nu-\rho}\tau^*(k)\otimes\sigma^{-1}(m)\Phi(g)\}\end{aligned}$$

により，右辺の空間に属する関数と同一視される．実際，$C^\infty_{\tau^*}(K\backslash G/MAN;\sigma\otimes e^{\nu+\rho})$ に属する関数 $\Phi(g)$ に対して

$$V_\tau\ni v\mapsto\langle\Phi(g),v\rangle\in I(\sigma,\nu)\tag{1}$$

という写像を考えると，$\langle\Phi(g),v\rangle$ は $I(\sigma,\nu)$ の τ-isotypic 成分に含まれるため，この写像は V_τ の $I(\sigma,\nu)$ への埋め込みを定める．逆に $\mathrm{Hom}_K(\tau,I(\sigma,\nu))$ に属する intertwining 作用素があれば，(1) により $C^\infty_{\tau^*}(K\backslash G/MAN;\sigma\otimes e^{\nu+\rho})$ に属する関数を構成できることも容易にわかる．

さて，ここで $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{s}$ を Cartan 分解とし，$\mathfrak{s}$ のある基底 $X_1,\ldots,X_r$ に対し，$X^1,\ldots,X^r$ を，$\mathfrak{g}$ 上の不変双一次形式に関する双対基底として，

$$\nabla\Phi(g):=\sum_i L(X_i)\Phi(g)\otimes X^i,\quad(\Phi\in C^\infty_{\tau^*}(K\backslash G/MAN;\sigma\otimes e^{\nu+\rho})$$

とおく．なお，ここの L は左移動を表す．

K の既約表現で最高ウェイトが λ であるものを $(\tau_\lambda,V_{\tau_\lambda})$ で表す．Cartan 分解の $\mathfrak{s}$ は，随伴作用により K の表現である．K の既約表現 $(\tau_\lambda,V_{\tau_\lambda})$ と $(\mathrm{Ad}|_{\mathfrak{s}},\mathfrak{s})$ のテンソル積表現を考える．$\Delta(\mathfrak{s},\mathfrak{t})$ をあるコンパクト Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}$ に関する $\mathfrak{s}$ のウェイト空間としたとき，各ウェイトの重複度が1であるなら ($G=Sp(2,\boldsymbol{R})$ の場合はそう)，テンソル積表現 $(\tau_\lambda\otimes\mathrm{Ad}|_{\mathfrak{s}},V_{\tau_\lambda}\otimes\mathfrak{s})$ は $\tau_\lambda\otimes\mathrm{Ad}|_{\mathfrak{s}}\simeq\sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{s},\mathfrak{t})}\tau_{\lambda+\alpha}$ のように既

約分解される．ここで $(\mathrm{Ad}|_{\mathfrak{s}}, \mathfrak{s})$ は K の表現として自己双対なので，双対表現の既約分解は $(\tau_\lambda)^* \otimes \mathrm{Ad}|_{\mathfrak{s}} \simeq \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{s},\mathfrak{t})}(\tau_{\lambda+\alpha})^*$ となる．ここで $\mathrm{pr}_\alpha : (\tau_\lambda)^* \otimes \mathrm{Ad}|_{\mathfrak{s}} \to (\tau_{\lambda+\alpha})^*$ をこの分解に沿った自然な射影とし，

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\alpha := \mathrm{pr}_\alpha \circ \nabla : \mathrm{Hom}_K(\tau_\lambda, I(\sigma,\nu)) &\simeq C^\infty_{(\tau_\lambda)^*}(K\backslash G/MAN; \sigma\otimes e^{\nu+\rho}) \\ &\to C^\infty_{(\tau_{\lambda+\alpha})^*}(K\backslash G/MAN; \sigma\otimes e^{\nu+\rho}) \simeq \mathrm{Hom}_K(\tau_{\lambda+\alpha}, I(\sigma,\nu))\end{aligned}$$

とおき，K-タイプの shift 作用素という．これは主系列表現への $\mathfrak{g}$ の作用を，K-タイプごとに書いたものである．

π を $I(\sigma,\nu)$ のある既約因子とし，$\Phi \in C^\infty_{(\tau_\lambda)^*}(K\backslash G/MAN; \sigma\otimes e^{\nu+\rho})$ が π の K-タイプ τ_λ に対応する関数であるとする．ここで K-タイプ $\tau_{\lambda+\alpha} \subset \tau_\lambda \otimes \mathrm{Ad}|_{\mathfrak{s}}$ は，ある既約因子 π' の K-タイプであるが，π の K-タイプではないと仮定する．もし $\mathcal{P}_\alpha\Phi \neq 0$ であり，$\mathcal{P}_\alpha\Phi$ が π の K-タイプ $\tau_{\lambda+\alpha}$ に対応することがわかっているなら，π の元を π' に写す $\mathfrak{g}$ の作用があることがわかる．よってこのとき π は socle filtration の中で π' よりも上にあることがわかる．

今の議論を「一番下」に適用すると，以下のようになる．

系 6 π を $I(\sigma,\nu)$ の部分加群とする．$\Phi \in C^\infty_{(\tau_\lambda)^*}(K\backslash G/MAN; \sigma\otimes e^{\nu+\rho})$ を π の K-タイプ τ_λ に対応する関数とする．このとき $\tau_{\lambda+\alpha} \subset \tau_\lambda \otimes \mathrm{Ad}|_{\mathfrak{s}}$ が π の K-タイプでないなら，$\mathcal{P}_\alpha\Phi = 0$ が成り立つ．

この系はある意味で当たり前であるが，部分加群となるような離散系列表現は，このような微分方程式系で完全に決定できる．

定理 7 (Yamashita) 既約表現 π が離散系列表現で，τ_λ がその極小 K-タイプであるとする．$\{\tau_{\alpha_1},\dots,\tau_{\alpha_j}\}$ を，$\tau_\lambda\otimes\mathrm{Ad}|_{\mathfrak{s}}$ の既約表現であるが π の K-タイプでないものの全体とする．

もし π の無限小指標が壁から遠いなら，方程式系 $\mathcal{P}_{\alpha_1}\Phi = 0,\dots,\mathcal{P}_{\alpha_j}\Phi = 0$ の解空間は，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(\pi, I(\sigma,\nu))$ と同型である．

この系 6，定理 7 を用いることで，$I(\sigma,\nu)$ の部分加群 (の候補) を決定する．

5 $Sp(2,\boldsymbol{R})$ の主系列表現

ここで $G = Sp(2,\boldsymbol{R})$ の主系列表現を具体的に実現しておこう．

$Sp(2,\boldsymbol{R})$ の split Cartan 部分群として，

$$\begin{aligned}&H = TA,\ \text{ただし}\\ &A := \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}) \mid a_1, a_2 > 0\},\\ &T := \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \mid \varepsilon_k \in \{\pm 1\}\}\end{aligned}$$

をとる．次に

$$P = MAN, \qquad \text{ただし} \qquad M = T, \qquad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & 0 \\ & & * & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とすれば，この P は $Sp(2, \boldsymbol{R})$ の極小放物型部分群である．

M の既約表現 σ_{ij} を

$$\sigma_{ij}(\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)) = \varepsilon_1^i \varepsilon_2^j$$

で定めれば，$\{\sigma_{00}, \sigma_{01}, \sigma_{10}, \sigma_{11}\}$ は M の既約表現の同値類の代表系である．また，$\mathfrak{a} = \{\mathrm{diag}(a, b, -a, -b) \mid a, b \in \boldsymbol{C}\}$ であるので，$\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathfrak{a}^*$ を

$$\nu(\mathrm{diag}(a, b, -a, -b)) = \nu_1 a + \nu_2 b$$

で定め，A の 1 次元表現と同一視する．

これまでに何度も述べているように，本稿では

$$I(w \cdot \sigma_{ij}, w(\nu_1, \nu_2)) = \mathrm{Ind}_P^G(w \cdot \sigma_{ij}, w(\nu_1, \nu_2))_{K\text{-finite}}$$

$(w \in W(B_2)$, $(\nu_1, \nu_2) = \rho = (2, 1))$ の socle filtration を調べたい．ここで無限小指標が自明であるとき，

(1) $I(w \cdot \sigma_{00}, w\rho)$ はブロック $PSO(3, 2)$ の標準加群 "10"

(2) $I(w \cdot \sigma_{11}, w\rho)$ はブロック $PSO(3, 2)$ の標準加群 "11"

(3) $I(w \cdot \sigma_{10}, w\rho)$ はブロック $PSO(4, 1)$ の標準加群 "4"

(4) $I(w \cdot \sigma_{01}, w\rho)$ はブロック $PSO(5)$ の唯一の標準加群

であることを注意しておく．

6 既約部分加群の候補

系 6，定理 7 を用いて計算した結果，今考えている主系列表現の部分加群の候補は以下のものに限られることがわかる．なお，ブロック $PSO(3, 2)$ の既約表現 $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ は離散系列表現であり，これらについては定理 7 により，単なる候補ではなく，真に部分加群となることが，この時点で確定している．また，候補が一つしかないなら，その候補は真に部分加群である．更に，定理 2(Langlands 分類) により，$\nu = (-2, -1)$ の場合については，系 6 や定理 7 を使わなくても，以下の表にあるものが部分加群であることがあらかじめわかっている．

以下の表の上段の $(2, 1)$, $(1, -2)$ などは，(σ, ν) の ν を表している．

(1) ブロック $PSO(3,2)$ で $(\sigma,\nu)=(\sigma_{00},w\rho)$ のとき

$(2,1)$	$(2,-1)$	$(1,2)$	$(1,-2)$
$\overline{0}$, $\overline{1}$	$\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$
$(-2,-1)$	$(-2,1)$	$(-1,-2)$	$(-1,2)$
$\overline{10}$	$\overline{8}$, $\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$

(2) ブロック $PSO(3,2)$ で $(\sigma,\nu)=(\sigma_{11},w\rho)$ のとき

$(2,1)$	$(2,-1)$	$(1,2)$	$(1,-2)$
$\overline{0}$, $\overline{1}$	$\overline{0}$, $\overline{1}$	$\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$	$\overline{6}$, $\overline{11}$
$(-2,-1)$	$(-2,1)$	$(-1,-2)$	$(-1,2)$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$, $\overline{5}$

(3) ブロック $PSO(4,1)$ で $(\sigma,\nu)=w(\sigma_{10},\rho)$ のとき

$(2,1)$	$(2,-1)$	$(1,2)$	$(1,-2)$
$\overline{0}$, $\overline{1}$	$\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{4}$	$\overline{0}$, $\overline{1}$	$\overline{2}$, $\overline{3}$
$(-2,-1)$	$(-2,1)$	$(-1,-2)$	$(-1,2)$
$\overline{4}$	$\overline{2}$, $\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{4}$

(4) ブロック $PSO(5)$ で $(\sigma,\nu)=w(\sigma_{01},\rho)$ のとき，主系列表現は既約である．

7 他の計算道具

K-タイプの shift 作用素だけでは socle filtration の決定は困難である．そのため，以下のような事実を使って考察を進める．

7.1 双対主系列表現

よく知られているように，主系列表現 $I(\sigma_{ij},\nu)$ と $I((\sigma_{ij})^*,-\nu)$ の間には，

$$I(\sigma_{ij},\nu)\times I((\sigma_{ij})^*,-\nu)\to \boldsymbol{C},\qquad \langle f_1,f_2\rangle=\int_K f_1(k)\,f_2(k)\,dk,$$

という自然な pairing がある．今の場合，$(\sigma_{ij})^*\simeq\sigma_{ij}$ なので，$I(\sigma_{ij},-\nu)\simeq I(\sigma_{ij},\nu)^*$ であり，これによりある主系列とその双対の主系列の組成列を比較しながら計算を進めることができる．

7.2 主系列間の intertwining 作用素

こちらもよく知られていることだが，主系列から主系列への intertwining 作用素が積分によって構成できる．それを簡単に復習しておこう．

ルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の正系で，べき零部分群 N に対応するものを $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ とし，この正系に対応する $W(G,A)$ (Weyl 群) の最長元を w° とする．ここで $w^\circ = r_1\cdots r_k$ を一つの reduced expression とし，$w_l := r_1\cdots r_l$ for $l=1,\dots,k$ とおく．すると 0 でない intertwining 作用素の列

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}_P^G(\sigma_{ij},\rho)\to\mathrm{Ind}_{w_1P(w_1)^{-1}}^G(\sigma_{ij},\rho)\to\dots\\&\qquad\to\mathrm{Ind}_{w_lP(w_l)^{-1}}^G(\sigma_{ij},\rho)\to\cdots\to\mathrm{Ind}_{w^\circ P(w^\circ)^{-1}}^G(\sigma_{ij},\rho)\end{aligned}$$

を積分によって構成できるが，ここに現れる極小放物型部分群が同じ P になるように共役を取れば，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}_P^G(\sigma_{ij},\rho)\to\mathrm{Ind}_P^G((w_1)^{-1}\cdot\sigma_{ij},(w_1)^{-1}\rho)\to\dots\\&\qquad\to\mathrm{Ind}_P^G((w_l)^{-1}\cdot\sigma_{ij},(w_l)^{-1}\rho)\to\dots\\&\qquad\to\mathrm{Ind}_P^G((w^o)^{-1}\sigma_{ij},(w^o)^{-1}\rho)\end{aligned}$$

という intertwining 作用素の列ができる．

以上は一般論であるが，これを $Sp(2,\boldsymbol{R})$ の場合に適用すると，

$$\begin{aligned}&I(\sigma_{ij},(2,1))\to I(\sigma_{ji},(1,2))\to I(\sigma_{ji},(1,-2))\\&\qquad\to I(\sigma_{ij}(-2,1))\to I(\sigma_{ij},(-2,-1))\qquad \text{と}\\&I(\sigma_{ij},(2,1))\to I(\sigma_{ij},(2,-1))\to I(\sigma_{ji},(-1,2))\\&\qquad\to I(\sigma_{ji}(-1,-2))\to I(\sigma_{ij},(-2,-1))\end{aligned}$$

という 0 でない intertwining 作用素の列があることがわかる．

この intertwining 作用素と，主系列表現の既約部分加群の候補を見れば，次のようなことがわかる：

(1) $I(\sigma_{00},(1,2))$ と $I(\sigma_{00},(1,-2))$ の socle は同型であり，socle に現れる既約因子の重複度は 1 である．一方，これらの主系列表現の間には，0 でない intertwinig 作用素がある．これらのことにより，$I(\sigma_{00},(1,2))$ と $I(\sigma_{00},(1,-2))$ は同型でなければならないことがわかる．

(2) 「部分加群の候補」を見ると，$I(\sigma_{00},(2,1))$ の socle は $\overline{0}\oplus\overline{1}$ で確定だが，$I(\sigma_{00},(2,-1))$ の socle は $\overline{0}\oplus\overline{1}$ と $\overline{0}\oplus\overline{1}\oplus\overline{7}$ の可能性があり，「部分加群の候補」だけではどちらかわからない．ここで intertwining 作用素 $I(\sigma_{00},(2,1))\to I(\sigma_{00},(2,-1))$ に注目する．もし $I(\sigma_{00},(2,-1))$ の socle が $\overline{0}\oplus\overline{1}$ であるなら，二つの主系列表現の socle が同型であることから，この intertwining 作用素

は単射であり，$I(\sigma_{00},(2,1)) \simeq I(\sigma_{00},(2,-1))$ となる．しかし，これらの双対表現の部分加群を見ると，この同型は成り立たないことがわかる．よって $I(\sigma_{00},(2,-1))$ の socle は $\overline{0}\oplus\overline{1}\oplus\overline{7}$ である．

7.3 水平対称性

今考えている $G = Sp(2,\boldsymbol{R})$ などの場合，主系列表現には「水平対称性」がある．その根拠となる定理をまず紹介する．

定理 8 (Vogan, Borel-Wallach, [3]) G を連結な実半単純線形 Lie 群で，その複素化が単連結なものとする．このとき G の自己同型群 Aut$G$ の元 μ であって，次を満たすものが存在する：
(i) $\mu(K) = K$,
(ii) 任意の既約 admissible $(\mathfrak{g}, K)$-加群 (π, V) に対し，π を μ でひねった表現 $(\pi^\mu, V^\mu) := (\pi\circ\mu^{-1}, V)$ は双対加群 (π^*, V^*) と同型である．

この定理を $G = Sp(2,\boldsymbol{R})$ の場合に適用する．このとき，定理の条件を満たす自己同型 μ として，$\mu(g) = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}$ がとれるが，この μ は $\mu|_{MA} = \mathrm{id}$, $\mu(N) = N$ を満たす．よって μ で主系列表現をひねると $I(\sigma,\nu)^\mu \simeq I(\sigma,\nu)$ が成り立つ．これにより，$I(\sigma,\nu)$ の組成列の順序を変えずに，各組成因子を双対加群に置き換えた表現 $I(\sigma,\nu)^\mu$ は元の $I(\sigma,\nu)$ と同型である．よってある既約因子 π が $I(\sigma,\nu)$ の socle filtration の k-階部分にあるなら，その双対加群 $\pi^* \simeq \pi^\mu$ も k-階部分にあることがわかった．

この定理の結果を使えば，互いに双対な既約加群は，主系列表現の組成列に組となって現れることがわかる．その組を列挙しておこう：

(1) ブロック $PSO(3,2)$ に含まれる既約表現で，互いに双対である組は，以下の通り：$\overline{0}\leftrightarrow\overline{1}$, $\overline{2}\leftrightarrow\overline{3}$, $\overline{4}\leftrightarrow\overline{5}$, $\overline{8}\leftrightarrow\overline{9}$．また次は自己双対である：$\overline{6}$, $\overline{7}$, $\overline{10}$, $\overline{11}$.

(2) ブロック $PSO(4,1)$ に含まれる既約表現で，互いに双対である組は，以下の通り：$\overline{0}\leftrightarrow\overline{1}$, $\overline{2}\leftrightarrow\overline{3}$．また次は自己双対である：$\overline{4}$.

7.4 長さの偶奇

定義 5 において，regular 指標の長さ $\ell(\gamma)$ を定義した．次の定理は Kazhdan-Lusztig-Vogan 予想の結果として得られるものである．

定理 9 (Vogan, [9]) 既約 admissible $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $\pi(\gamma_1), \pi(\gamma_2)$ に対し,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(\pi(\gamma_1), \pi(\gamma_2)) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \ell(\gamma_1) \not\equiv \ell(\gamma_2) \mod 2$$

が成り立つ.

この定理より，例えば次のようにして主系列表現の各 socle に現れる既約因子の候補を絞ることができる.

系 10 $I(\sigma,\nu)$ の socle filtration の k-階部分を $\pi(\gamma_1) \oplus \cdots \oplus \pi(\gamma_r)$ と表し，$\pi(\gamma')$ を $(k+1)$-階に現れる既約因子とする．このときもし $\ell(\gamma_1) \equiv \cdots \equiv \ell(\gamma_r) \mod 2$ であるなら，$\ell(\gamma') \not\equiv \ell(\gamma_i) \mod 2$ でなければならない.

本稿で扱っている $Sp(2,\boldsymbol{R})$ の主系列の場合，すでに求めた「部分加群の候補」を見ると，socle に含まれる既約因子の長さの偶奇は，どの主系列の場合でも一致していることがわかる．よって系 10 により，$I(\sigma,\nu)$ の socle filtration では,「偶数階」と「奇数階」が交互に現れることがわかる.

8 主結果

以上の道具を用いて計算した結果を列挙する.

定理 11 $Sp(2,\boldsymbol{R})$ の主系列表現で，自明な無限小指標を持つものの socle filtration は以下のようになる.

但し，定理の表の 1 行目は (σ,ν) を表し，2 行目は $I(\sigma,\nu)$ の socle filtration を表す．この 2 行目の図は，一番下にあるのがその主系列の socle，下から 2 番目にあるのが，主系列を socle で割った表現の socle，and so on と読む.

また，今の場合 $I(\sigma,\nu)$ の双対表現は $I(\sigma,-\nu)$ であり，後者の socle filtration は前者のそれの上下を逆にしたものである.

(1) $I(\sigma,\nu)$, $(\sigma,\nu) = w(\sigma_{00},(2,1))$, $w \in W(B_2)$, の socle filtration は以下の通りである．但し，既約因子はブロック $PSO(3,2)$ に属するものである.

$(\sigma_{00},(2,1))$	$(\sigma_{00},(2,-1))$	$(\sigma_{00},(1,\pm 2))$
$\overline{10}$ $\overline{7} \oplus \overline{8} \oplus \overline{9}$ $\overline{4} \oplus \overline{5} \oplus \overline{6} \oplus \overline{6}$ $\overline{0} \oplus \overline{1}$	$\overline{8} \oplus \overline{9}$ $\overline{4} \oplus \overline{5} \oplus \overline{6} \oplus \overline{6} \oplus \overline{10}$ $\overline{0} \oplus \overline{1} \oplus \overline{7}$	$\overline{7}$ $\overline{4} \oplus \overline{5} \oplus \overline{6} \oplus \overline{10}$ $\overline{0} \oplus \overline{1} \oplus \overline{8} \oplus \overline{9}$ $\overline{6}$

(2) $I(\sigma,\nu)$, $(\sigma,\nu) = w(\sigma_{11},(2,1))$, $w \in W(B_2)$, の socle filtration は以下の通りである．但し，既約因子はブロック $PSO(3,2)$ に属するものである.

$(\sigma_{11},(2,\pm 1))$	$(\sigma_{11},(1,2))$	$(\sigma_{11},(1,-2))$
$\overline{11}$ $\overline{2}\oplus\overline{3}\oplus\overline{7}$ $\overline{4}\oplus\overline{5}\oplus\overline{6}$ $\overline{0}\oplus\overline{1}$	$\overline{7}$ $\overline{4}\oplus\overline{5}\oplus\overline{6}\oplus\overline{11}$ $\overline{0}\oplus\overline{1}\oplus\overline{2}\oplus\overline{3}$	$\overline{4}\oplus\overline{5}$ $\overline{0}\oplus\overline{1}\oplus\overline{2}\oplus\overline{3}\oplus\overline{7}$ $\overline{6}\oplus\overline{11}$

(3) $I(\sigma,\nu)$, $(\sigma,\nu)=w(\sigma_{10},(2,1))$, $w\in W(B_2)$, の socle filtration は以下の通りである．但し，既約因子はブロック $PSO(4,1)$ に属するものである．

$(\sigma_{10},(2,1))$, $(\sigma_{01},(1,2))$	$(\sigma_{10},(2,-1))$	$(\sigma_{01},(1,-2))$
$\overline{4}$ $\overline{2}\oplus\overline{3}$ $\overline{0}\oplus\overline{1}$	$\overline{2}\oplus\overline{3}$ $\overline{0}\oplus\overline{1}\oplus\overline{4}$	$\overline{0}\oplus\overline{1}\oplus\overline{4}$ $\overline{2}\oplus\overline{3}$

(4) $I(\sigma,\nu)$, $(\sigma,\nu)=w(\sigma_{01},(2,1))$, $w\in W(B_2)$, は既約である．

本稿で説明した計算方法をどのように使えば良いかわかるように，証明の例を挙げておく．

(a) $(\sigma,\nu)=(\sigma_{00},(2,-1))$ のとき．
まず §7.2(2) で説明したように，$I(\sigma_{00},(2,-1))$ の socle は $\overline{0}\oplus\overline{1}\oplus\overline{7}$ である．

一方,「既約部分加群の候補」の (1) の $(-2,1)$ の項を見れば，$I(\sigma_{00},(2,-1))$ の双対加群 $I(\sigma_{00},(-2,1))$ の部分加群となり得るのは $\overline{8},\overline{9}$ の二つである．ここで「水平対称性」により，これらは主系列の socle filtration において，同じ階に現れる．よって $I(\sigma_{00},(-2,1))$ は 0 加群でないことから，その socle が $\overline{8}\oplus\overline{9}$ であることがわかる．

最後に Kazhdan-Lusztig-Vogan 予想の結果より，$I(\sigma_{00},(2,-1))$ の既約因子は，$\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$ (2 個)，$\overline{7}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$, $\overline{10}$ であり，そのうち長さが偶数のものは $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{7}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$ であり，奇数のものは $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$ (2 個)，$\overline{10}$ である．これらのうち，長さが偶数のものは $I(\sigma_{00},(2,-1))$ の部分加群と，その双対 $I(\sigma_{00},(-2,1))$ の部分加群で使い切っている．このことから残りの $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$ (2 個)，$\overline{10}$ は全て 2 階部分にあり，

$$I(\sigma_{00},(2,-1))\simeq\begin{array}{c}\overline{8}\oplus\overline{9}\\ \overline{4}\oplus\overline{5}\oplus\overline{6}\oplus\overline{6}\oplus\overline{10}\\ \overline{0}\oplus\overline{1}\oplus\overline{7}\end{array}$$ となることがわかる．

(b) $(\sigma,\nu)=(\sigma_{00},(2,1))$ のとき．
このときも，まず「既約部分加群の候補」から，$(\sigma_{00},(2,1))$ の socle は $\overline{0}\oplus\overline{1}$ であり，その双対表現の socle は $\overline{10}$ であることがわかる．また，既約部分加群の候補を見つける際の計算により，部分加群となる $\overline{0}$, $\overline{1}$ の極小 K-タイプに対応する関数 (§4 の "Φ") もわかる．

残りの既約因子の長さは，$\overline{7}, \overline{8}, \overline{9}$ のとき偶数，$\overline{4}, \overline{5}, \overline{6}$ (2 個) のとき奇数である．上記 (a) の場合と異なり，これだけでは socle filtration は決まらないので，各既約因子の K-タイプに対応する関数を求めて，それを K-タイプ shift で動かしたときの結果を見る必要がある．まず，$\overline{8}, \overline{9}$ には 1 次元 K-タイプがあるので，その K-タイプのところの "Φ" 関数はすぐにわかる．また，$\overline{7}$ については，その K-タイプ $(1,-1)$ の元で M の表現 σ_{00} に従うものは 1 次元しかないので，この表現に対しても，K-タイプ $(1,-1)$ のところの "Φ" もすぐにわかる．

これらの Φ 関数を shift 作用素で $\overline{4}, \overline{5}, \overline{6}$ の K-タイプへ動かした結果，そのベクトルが modulo $\overline{0}, \overline{1}$ で消えないことが確かめられる．以上により，$\overline{7}, \overline{8}, \overline{9}$ は，この主系列表現の socle filtration の中で，$\overline{4}, \overline{5}, \overline{6}$ (2 個) よりも上にあることが確かめられる．

以上のような手続きを踏めば，$I(\sigma_{00}, (2,1))$ の socle filtration が定理にある形であることが証明できる．

参考文献

[1] Atlas web page. http://www.liegroups.org/

[2] Beilinson, A.; Bernstein, J., Localisation de $\mathfrak{g}$-modules, C. R. Acad. Sci. Paris Se'r. I Math. 292 (1981), no. 1, 15–18. MR0610137 (82k:14015)

[3] Borel, A.; Wallach, N., *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups. Second edition*, Mathematical Surveys and Monographs, 67. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000. MR1721403

[4] Brylinski, J.-L.; Kashiwara, M., Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent. Math. 64 (1981), no. 3, 387–410. MR0632980 (83e:22020)

[5] Collingwood, D. H., *Representations of rank one Lie groups*, Research Notes in Mathematics, 137. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985. MR0853731 (88c:22014)

[6] Kazhdan, D.; Lusztig, G., Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. 53 (1979), no. 2, 165–184. MR0560412 (81j:20066)

[7] Kraljević, H. : Representations of the unversal covering group of the group $SU(n,1)$, Glas. Mat. Ser. III **8(28)** No. 1 (1973), 23–72.

[8] Langlands, R. P., On the classification of irreducible representations of real algebraic groups. *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups*, 101–170, Math. Surveys Monogr., 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989. MR1011897 (91e:22017)

[9] Vogan, D. A., Jr., Representations of real reductive Lie groups. Progress in Mathematics, 15. Birkha"user, Boston, Mass., 1981. xvii+754 pp. ISBN: 3-7643-3037-6 MR0632407 (83c:22022)

[10] Vogan, D, A., Jr., Irreducible characters of semisimple Lie groups. II. The Kazhdan-Lusztig conjectures. Duke Math. J. 46 (1979), no. 4, 805–859. MR0552528 (81f:22024)

[11] Vogan, D. A., Irreducible characters of semisimple Lie groups. III. Proof of Kazhdan-Lusztig conjecture in the integral case. Invent. Math. 71 (1983), no. 2, 381–417. MR0689650 (84h:22036)

[12] Vogan, D. A., Jr., Irreducible characters of semisimple Lie groups. IV. Character-multiplicity duality. Duke Math. J. 49 (1982), no. 4, 943–1073. MR0683010 (84h:22037)

[13] Vogan, D. A., Jr., The Kazhdan-Lusztig conjecture for real reductive groups. Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982), 223–264, Progr. Math., 40, Birkhaüser Boston, Boston, MA, 1983. MR0733817 (85g:22028)

[14] Yamashita, H., Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups. I. General theory and the case of SU(2,2). Japan. J. Math. (N.S.) 16 (1990), no. 1, 31–95. MR1064445 (92c:22032)